

2023年6月

ISSN 1005 - 6416
CN 12-1121/O1

中等数学

High-School Mathematics

TIANJIN · P.R.China 2023

ZHONGDENG SHUXUE

ISSN 1005-6416



No. **3**

天津市数学会
天津师范大学
主办

全科互知

目次

数学活动课程讲座

数学竞赛中组合计数问题方法选讲..... 唐立华(2)

命题与解题

2022年全国中学生数学奥林匹克(决赛)试题与答卷情况分析
..... 主试委员会(10)

一道初中竞赛题的多种解法与推广..... 王松萍 金荣生(16)

赛题另解

..... 李昱材 黄驰涵(19)

高材生培养

指向拔尖创新人才培养的高中数学综合实践课程实践探索..... 张文涛(21)

高效率数学教学设计

数学方法论指导下的中学数学教学研究与实践..... 韦兰英(27)

以学科融合提升学生数学应用能力..... 雷丽(32)

初等数学研究

对一道数学竞赛试题的再发现..... 周赛龙 储炳南(36)

竞赛之窗

第21届中国女子数学奥林匹克..... (40)

2022中国数学奥林匹克希望联盟夏令营(二)..... (47)

再品佳题

2019中欧数学奥林匹克..... (52)

课外训练

数学奥林匹克高中训练题(285)..... 向雍立 江海兵 石莹(59)

数学奥林匹克问题..... 程汉波 安振平 王永喜等(64)



中等数学

High-School Mathematics

2023年第3期(总第351期)

(2023年6月中旬出版)

主 编 王光明

副 主 编 姜姗姗

名誉编委(按姓氏笔画为序)

申 铁 杨亦君 苏 淳

李 炘 李学武 李新暖

吴振奎 陈传理 袁宗沪

编 委(按姓氏笔画为序)

丁龙云 王 浩 王光明

冯志刚 冯祖鸣 朱华伟

孙 力 刘诗雄 刘金英

李 龙 李 军 李 明

李 涛 李 赛 李伟国

李宝毅 李建泉 李胜宏

肖 梁 吴建平 余红兵

冷岗松 宋宝莹 张 明

陈永高 段华贵 姜姗姗

姚一隽 黄利兵 梁应德

梁哲云 熊 斌 潘 铁

瞿振华

编辑部主任 宋宝莹

编辑部电话 022-23542233

发行部电话 15822631163

E-mail zdsxlx@163.com



CONTENTS

No. 3(2023)

Method Selection of Combinatorial Counting Problems in Mathematics Competition.....	TANG Lihua (2)
Analysis of Questions and Answer about the National Senior High School's Mathematical Olympiad in 2022 (Final Round).....	(10)
Multiple Solutions and Promotion of a Junior High School Competition Problem.....	WANG Songping JIN Rongsheng(16)
Other Solution of Mathematics Competition Problems.....	LI Yucai HUANG Chihan(19)
A Practical Exploration of Senior High School Mathematics Comprehensive Practice Curriculum for Training Top-notch Innovative Talents.....	ZHANG Wentao(21)
The Research and Practice of Middle School Mathematics Teaching under the Guidance of Mathematics Methodology.....	WEI Lanying(27)
Enhance Students' Mathematics Application Ability by Subject Integration.....	LEI Li(32)
A Rediscovery of a Mathematics Competition Problem.....	ZHOU Sailong CHU Bingnan(36)
The 21st Chinese Girls' Mathematical Olympiad.....	(40)
Summer Camp of the Hope' League of Chinese Mathematical Olympiad in 2022 (II).....	(47)
Middle European Mathematical Olympiad in 2019.....	(52)
Training Problems for Senior High School's Mathematical Olympiad(285).....	XIANG Yongli JIANG Haibing SHI Ying(59)
Problems on Mathematical Olympiad.....	CHENG Hanbo AN Zhenping WANG Yongxi et al.(64)

中等数学

ZHONGDENGSHUXUE

双月刊

1982年12月创刊

主管单位 天津市教育委员会

主 办 天津师范大学

天津市数学学会

编辑出版 中等数学编辑部
主 编 王光明
地 址 天津市西青区宾水西道 393 号
邮 编 300387
印 刷 天津市卫印印刷有限责任公司
刊 号 ISSN 1005 - 6416
CN 12 - 1121/O1
国外发行 中国国际图书贸易集团有限公司
国外代号 BM 5102
国内发行 中国邮政集团公司天津市分公司
零售订阅 中国邮政集团公司
发行代号 6 - 75
定 价 10.00 元

本期责任编辑 娄姗姗

的高线长分别为 h_1, h_2, h_3 , 证明:

$$\frac{h_1 R_1}{h_1 - 2r} + \frac{h_2 R_2}{h_2 - 2r} + \frac{h_3 R_3}{h_3 - 2r} = r_1 + r_2 + r_3.$$

证明 设 $\odot O$ 的半径为 R .

由欧拉公式可得

$$OI = \sqrt{R(R-2r)}.$$

在 $\triangle AOI$ 中, 点 I_1 在边 AO 上, 且 $AO = R$,

$$AI_1 = r_1, I_1 O = R - r_1, II_1 = r_1 - r.$$

由斯特瓦尔特定理得

$$\begin{aligned} II_1^2 &= \frac{AI_1 \cdot OI^2 + I_1 O \cdot AI^2}{AO} - AI_1 \cdot I_1 O \\ &\Rightarrow (r_1 - r)^2 \\ &= \frac{r_1 R(R-2r) + (R-r_1) AI^2}{R} - r_1(R-r_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{R(AI^2 - r^2)}{AI^2} = R \cos^2 \frac{A}{2}.$$

$$\text{类似地, } r_2 = R \cos^2 \frac{B}{2}, r_3 = R \cos^2 \frac{C}{2}.$$

则 $r_1 + r_2 + r_3$

$$= R \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right).$$

在 $\triangle AOI$ 中, 点 O_1 在边 AO 上, 且 $AO_1 =$

$$R_1, O_1 O = R - R_1, IO_1 = R_1 + r.$$

由斯特瓦尔特定理得

$$\begin{aligned} IO_1^2 &= \frac{AO_1 \cdot OI^2 + O_1 O \cdot AI^2}{AO} - AO_1 \cdot O_1 O \\ &\Rightarrow (R_1 + r)^2 \\ &= \frac{R_1 R(R-2r) + (R-R_1) AI^2}{R} - R_1(R-R_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{R(AI^2 - r^2)}{AI^2 + 4Rr}.$$

因为 $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$, 所以,

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$\text{故 } R_1 = \frac{R(AI^2 - r^2)}{AI^2 + 4Rr}$$

$$= \frac{R \sin^2 \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \right)}$$

$$= \frac{R \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{B+C}{2}}$$

$$= R \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}.$$

作 $\odot I$ 的平行于 BC 的切线, 与边 AB, AC 分别交于点 B_1, C_1 . 于是, A 为 $\triangle AB_1 C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心.

$$\text{则 } \frac{h_1 - 2r}{h_1} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{r \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)}{r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)}$$

$$= \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}.$$

$$\text{由 } R_1 = \frac{R(h_1 - 2r)}{h_1} \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1 R_1}{h_1 - 2r} = R \cos^2 \frac{A}{2}.$$

类似地,

$$\frac{h_2 R_2}{h_2 - 2r} = R \cos^2 \frac{B}{2}, \frac{h_3 R_3}{h_3 - 2r} = R \cos^2 \frac{C}{2}.$$

$$\text{故 } \frac{h_1 R_1}{h_1 - 2r} + \frac{h_2 R_2}{h_2 - 2r} + \frac{h_3 R_3}{h_3 - 2r}$$

$$= R \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$= r_1 + r_2 + r_3.$$

(李建泉 天津师范大学教育科学与数学奥林匹克研究所, 300387)