2023年6月

ISSN 1005－6416
CN 12-1121/O1

中等数学

High-School Mathematics

TIANJIN · P.R.China 2023
ZHONGDENG SHUXUE

天津市数学学会
天津师范大学
主办

ISSN 1005-6416
06>
9 771005 641239

No. 3

全科互知

目　次

HSM TIANJIN.P.R.C.1982

中等数学

High-School Mathematics

2023年第3期(总第351期)

(2023年6月中旬出版)

主　　编　王光明

副 主 编　娄姗姗

名誉编委(按姓氏笔画为序)

申　铁　杨亦君　苏　淳

李　炘　李学武　李新暖

吴振奎　陈传理　裘宗沪

编　　委(按姓氏笔画为序)

丁龙云　王　浩　王光明

冯志刚　冯祖鸣　朱华伟

孙　力　刘诗雄　刘金英

李　龙　李　军　李　明

李　涛　李　赛　李伟固

李宝毅　李建泉　李胜宏

肖　梁　吴建平　余红兵

冷岗松　宋宝莹　张　明

陈永高　段华贵　娄姗姗

姚一隽　黄利兵　梁应德

梁哲云　熊　斌　潘　铁

瞿振华

编辑部主任　宋宝莹

编辑部电话　022-23542233

发行部电话　15822631163

E-mail　zdsxlx@163.com

期刊基本参数:CN 12-1121/O1 * 1982 * b * 16 * 64 * zh * P * ¥10.00 * 9000 * 13 * 2023-06

全科互知

CONTENTS No. 3(2023)

中等数学

ZHONGDENGSHUXUE

双月刊

1982 年 12 月创刊

主管单位 天津市教育委员会

主　　办 天津师范大学
　　　　 天津市数学学会

编辑出版 中等数学编辑部

主　　编 王光明

地　　址 天津市西青区宾水西道 393 号

邮　　编 300387

印　　刷 天津市卫印印刷有限责任公司

刊　　号 ISSN 1005 - 6416
　　　　 CN 12 - 1121/O1

国外发行 中国国际图书贸易集团有限公司

国外代号 BM 5102

国内发行 中国邮政集团公司天津市分公司

零售订阅 中国邮政集团公司

发行代号 6 - 75

定　　价 10.00 元

本期责任编辑 娄姗姗

全科互知

的高线长分别为 h_1、h_2、h_3，证明：

$$\frac{h_1R_1}{h_1-2r}+\frac{h_2R_2}{h_2-2r}+\frac{h_3R_3}{h_3-2r}=r_1+r_2+r_3.$$

证明 设 $\odot O$ 的半径为 R.

由欧拉公式可得

$$OI=\sqrt{R(R-2r)}.$$

在 $\triangle AOI$ 中，点 I_1 在边 AO 上，且 $AO=R$，$AI_1=r_1$，$I_1O=R-r_1$，$II_1=r_1-r$.

由斯特瓦尔特定理得

$$II_1^2=\frac{AI_1\cdot OI^2+I_1O\cdot AI^2}{AO}-AI_1\cdot I_1O$$

$$\Rightarrow (r_1-r)^2=\frac{r_1R(R-2r)+(R-r_1)AI^2}{R}-r_1(R-r_1)$$

$$\Rightarrow r_1=\frac{R(AI^2-r^2)}{AI^2}=R\cos^2\frac{A}{2}.$$

类似地，$r_2=R\cos^2\frac{B}{2}$，$r_3=R\cos^2\frac{C}{2}$.

则 $r_1+r_2+r_3$

$$=R\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right).$$

在 $\triangle AOI$ 中，点 O_1 在边 AO 上，且 $AO_1=R_1$，$O_1O=R-R_1$，$IO_1=R_1+r$.

由斯特瓦尔特定理得

$$IO_1^2=\frac{AO_1\cdot OI^2+O_1O\cdot AI^2}{AO}-AO_1\cdot O_1O$$

$$\Rightarrow (R_1+r)^2=\frac{R_1R(R-2r)+(R-R_1)AI^2}{R}-R_1(R-R_1)$$

$$\Rightarrow R_1=\frac{R(AI^2-r^2)}{AI^2+4Rr}.$$

因为 $r=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$，所以，

$$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=4R\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

故 $R_1=\dfrac{R(AI^2-r^2)}{AI^2+4Rr}$

$$=\frac{R\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{R\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$=R\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}.$$

作 $\odot I$ 的平行于 BC 的切线，与边 AB、AC 分别交于点 B_1、C_1. 于是，A 为 $\triangle AB_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心.

则 $\dfrac{h_1-2r}{h_1}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{r\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}{r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}$

$$=\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}.$$

由 $R_1=\dfrac{R(h_1-2r)}{h_1}\cos^2\dfrac{A}{2}$

$$\Rightarrow\frac{h_1R_1}{h_1-2r}=R\cos^2\frac{A}{2}.$$

类似地，

$$\frac{h_2R_2}{h_2-2r}=R\cos^2\frac{B}{2},\ \frac{h_3R_3}{h_3-2r}=R\cos^2\frac{C}{2}.$$

故 $\dfrac{h_1R_1}{h_1-2r}+\dfrac{h_2R_2}{h_2-2r}+\dfrac{h_3R_3}{h_3-2r}$

$$=R\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=r_1+r_2+r_3.$$

（李建泉　天津师范大学教育科学与数学奥林匹克研究所，300387）

全科互知